Suite majorée, minorée, bornée.

Soit $(u_n)_n$ une suite.

- $(u_n)_n$ est majorée si :
  $\exists M\in\mathbb{R}\ \ \forall n\in\mathbb{N}\ \ u_n\leq M$
- $(u_n)_n$ est minorée si
  $(\exists m\in\mathbb{R})\ \ (\forall n\in\mathbb{N})\ \ u_n\geq m$
- $(u_n)_n$ est borne si elle est majorée et minorée
  $(\exists M\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N})\ \ |u_n|\leq M$

Suite croissante, décroissante.

- $(u_n)_n$ croissante si $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_{n+1}\geq u_n$
- $(u_n)_n$ décroissante si $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_{n+1}\leq u_n$
- $(u_n)_n$ monotone si elle est croissante ou décroissante.

Convergence:

- $(u_n)_n$ est convergente si elle admet une limite finie.
- Tout suite est convergente, sa limite est unique.
- Tout suite convergente est bornée
- Théoreme des gendarme.
  si
  $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ u_n\leq v_n\leq w_n$
  et $\lim\limits_{+\infty} u_n=\ell$ et $\lim\limits_{+\infty} w_n=\ell$
  alors $\lim\limits_{+\infty} v_n=\ell$
- Tout suite croissante et majorée est convergente. $\ell=\sup\{u_n / n\in\mathbb{N}\}$
- Tout suite décroissante et minorée est convergente. $\ell=\inf\{u_n / n\in\mathbb{N}\}$

- Tout suite croissante et qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$
- Tout suite décroissante et qui n'est pas minorée tend vers -1
- Tout suite croissante et négatif est convergente.
- Tout suite décroissant et positive est convergente.

Soit $a\in\mathbb{R}$ $\qquad u_n=a^n$

- si $-1<a<1$ alors $\lim\limits_{+\infty} a^n=0$
- si $a=1$ alors a^n cst et $\longrightarrow 1$
- si $a>1$ alors $\lim\limits_{+\infty} a^n=+\infty$

Suites telles que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<\ell<1$

$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<\ell<1 \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} u_n=0$

si $\lim\limits_{+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0 \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} u_n=0$

Suites adjacentes.

Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont dites adjacentes si :

1 – $(u_n)_n$ est croissante et $(v_n)_n$ est décroissante.

2 – pour tout $n\geq 0$, on a $u_n\leq v_n$

3 – $\lim\limits_{+\infty}(v_n-u_n)=0$

Th :

Si les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes elles convergent ver la même limite.

Sous – suite

Soit $(u_n)_n$ une suite. on dit que la suite $(v_n)_n$ est une sous-suite ou une suite extraite de $(u_n)_n$ s'il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ telle que pour tous n :

$$v_n=u_{\varphi(n)}$$

Soit $(u_n)_n$ une suite. Alors $(u_n)_n$ tend vers ℓ ssi tout sous suite de $(u_n)_n$ tend vers ℓ.

Valeur d'adhérence d'une suite

Soit $(u_n)_n$ une suite. on dit qu'un nombre $\ell\in\mathbb{R}$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_n$ s'il est limite d'une suite extraite de $(u_n)_n$

Suites récurrentes.

Soit $f : I\to\mathbb{R}$ une fonction. une suite recurrente est définie par :

$u_0\in I$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour $n\geq 0$.

- Si f est continue sur I.
- et $u_0\in I$
- et $f(I)\subset I$
- $(u_n)_n$ convergente vers ℓ.

alors ℓ est une solution $f(\ell)=\ell$

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Toute suite bornée de $\mathbb{R}$, on peut extraire une suite convergente

Suites de Cauchy

on dit qu'une suite $(u_n)_n$ est de Cauchy si :

$(\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*).(\exists n_0\in\mathbb{N}),\ \forall(p,q)\in\mathbb{N}^*$
$p>q\geq n_0 \Rightarrow |u_p-u_q|\leq\varepsilon$.

n'est pas de Cauchy lorsque.

$\exists\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*.\ \forall n_0\in\mathbb{N},\ \exists(p,q)\in\mathbb{N}^*$
$p>q\geq n_0$ et $|u_p-u_q|>\varepsilon$

$(u_n)_n$ convergente $\Rightarrow (u_n)_n$ de Cauchy
$\Rightarrow (u_n)_n$ bornée.

Suites et continuité

Soit $f : I\to\mathbb{R}$, $x_0\in I$

f est continue en x_0 $\Leftrightarrow$ pour toute suite $(u_n)_n$ qui converge vers x_0 la suite $f(u_n)$ converge vers $f(x_0)$

mohamed boutarbouch

Continuité en un point

f est continue en x_0 si elle est définie en x_0 et si $\lim_{x_0} f(x) = f(x_0)$.

$$\lim_{x_0^-} f(x) = \lim_{x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Continueté sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur I. on dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Compositions de fonctions continues sur I.

. si $f: I \to \mathbb{R}$ et $g: J \to \mathbb{R}$ sont continues avec $f(I) \subset J$ alors $g \circ f$ est continue sur I.

Prolongement par continuité

soit $f: I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$

• on dit que f est prolongeable par continueté en x_0 si f admet une limite finie en x_0, $\lim_{x_0} f = \ell$

• On définie alors la fonction: $\tilde{f}: I \to \mathbb{R}$, $\forall x \in I$.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

alors $\tilde{f}$ est continue en x_0 et on le prolongement par continueté de f en x_0.

Théoreme des valeurs intérmédiaire

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$.

• Si $f(a) \cdot f(b) < 0$ alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$

* pour montrer que $f(x) = 0$ admet un solution sur $[a,b]$ il suffit:
- f est continue sur $[a,b]$
- $f(a) \cdot f(b) < 0$

alors par TVI on a $f(x) = 0$

• Si f est continue et strictement monotone sur $[a,b]$ tq $f(a) \cdot f(b) < 0$ alors $f(x) = 0$ admet unique solution sur $[a,b]$.

Théorème de la bijection

Soit $f: I \to \mathbb{R}$ définie sur I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I. alors: f est une bijection de I vers $f(I) = J$

La fonction réciproque $f^{-1}: J \to I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f.

mohamed boutarbouch

Logarithme:

$\ln:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$

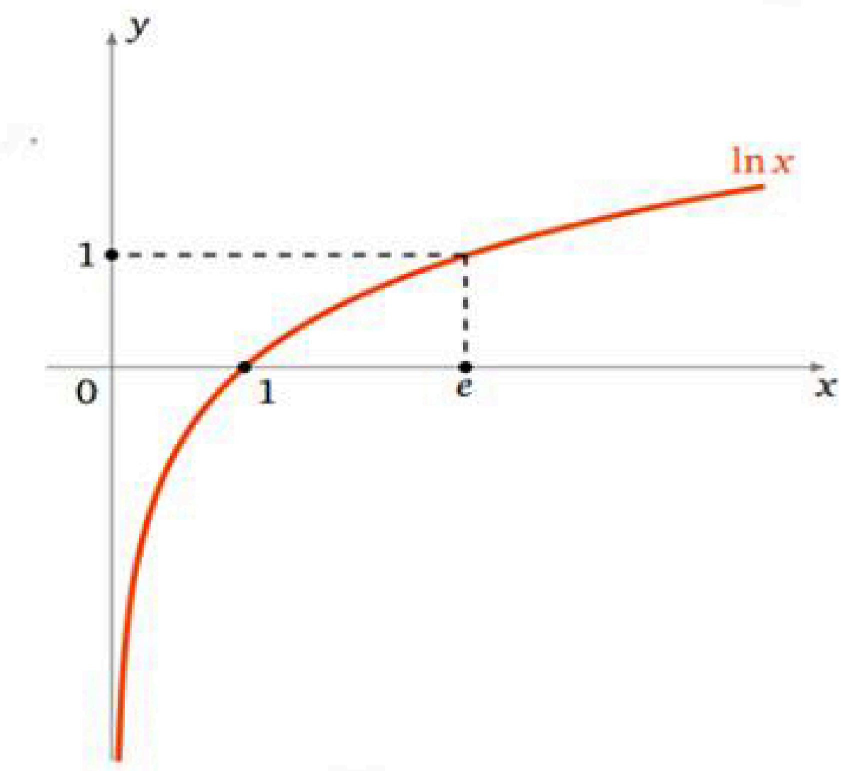
$\forall x > 0$ $\quad \ln'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad \ln(1) = 0$

$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$

$\ln a^n = n \ln a$ $\quad (\forall n \in \mathbb{N})$



Exponentielle

$\exp: \mathbb{R} \to]0, +\infty[$

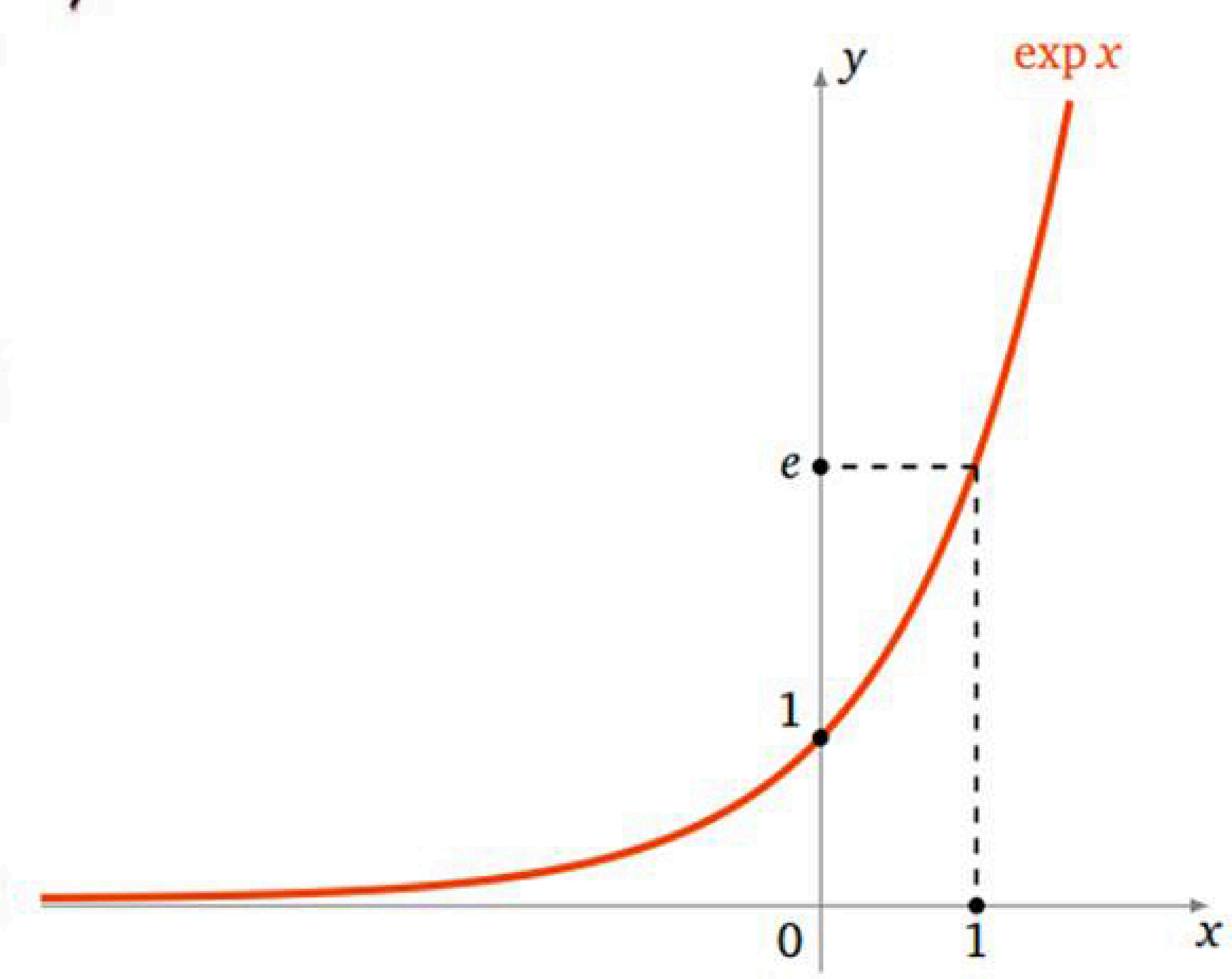
$e^{\ln x} = x$, $(\forall x > 0)$

$\ln(e^x) = x$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

$e^{nx} = (e^x)^n$

exp : strictement croissant, continue $\mathbb{R}$



arccosinus

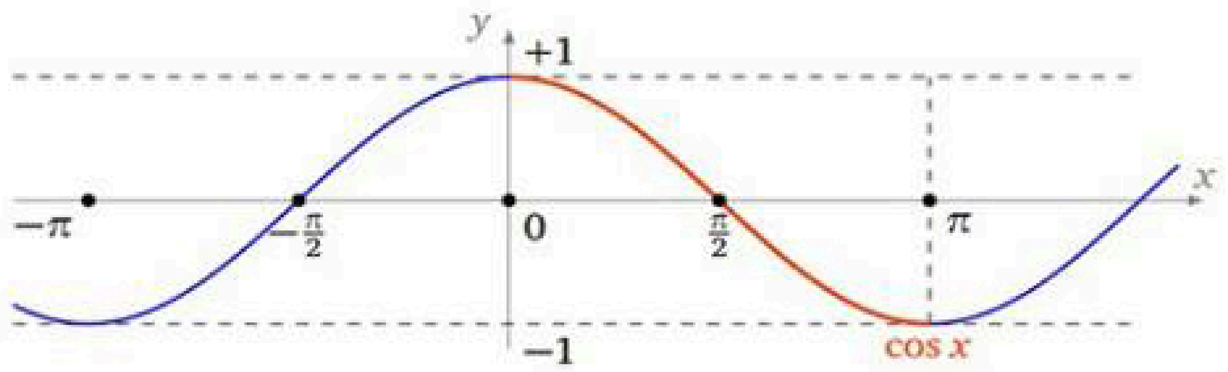
$\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$

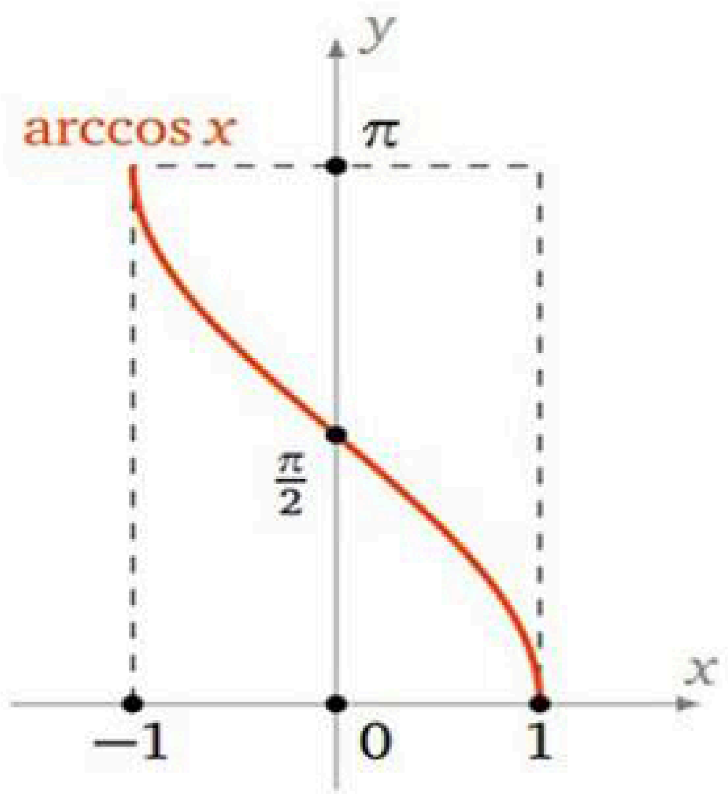
$\arccos : [-1,1] \to \mathbb{R}$

pour obtenir une bijection

$\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$

$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$





$\forall x \in]-1,1[\quad \arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

arc sinus

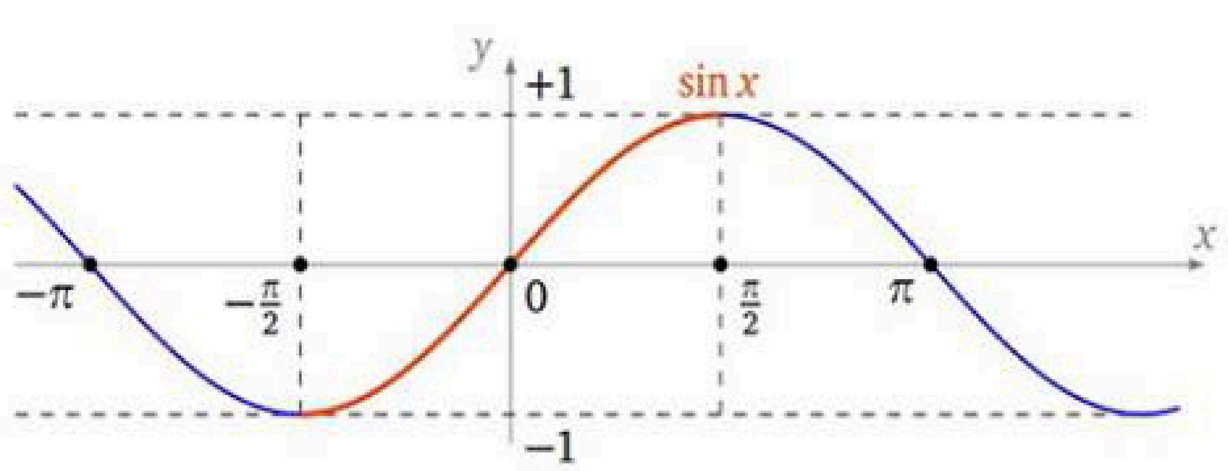
$\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$

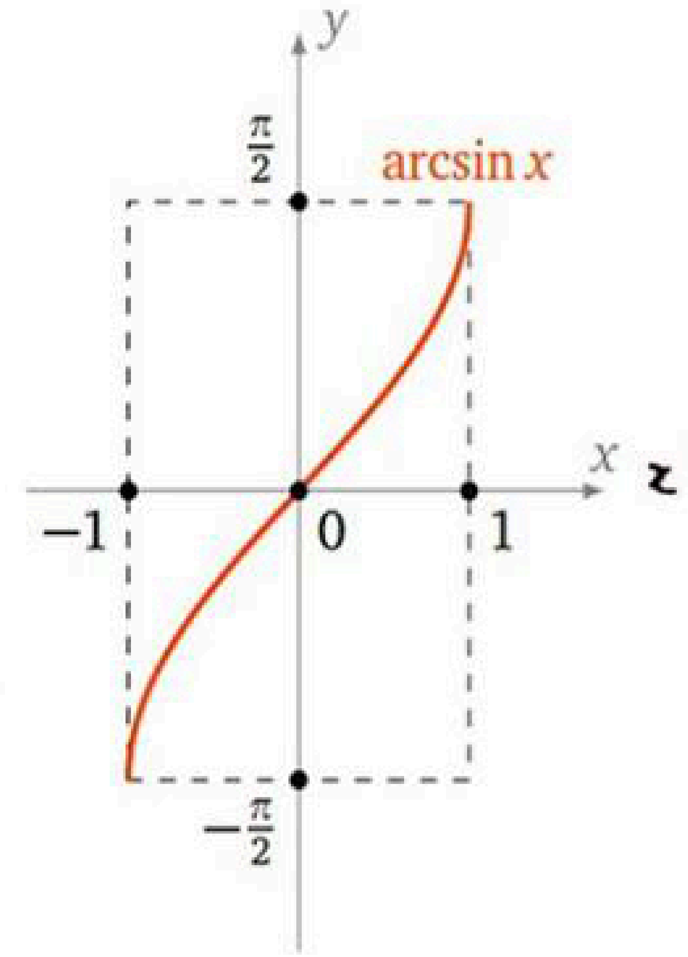
$\arcsin : [-1,1] \to \mathbb{R}$

pour obtenir une bijection

$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$

$\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



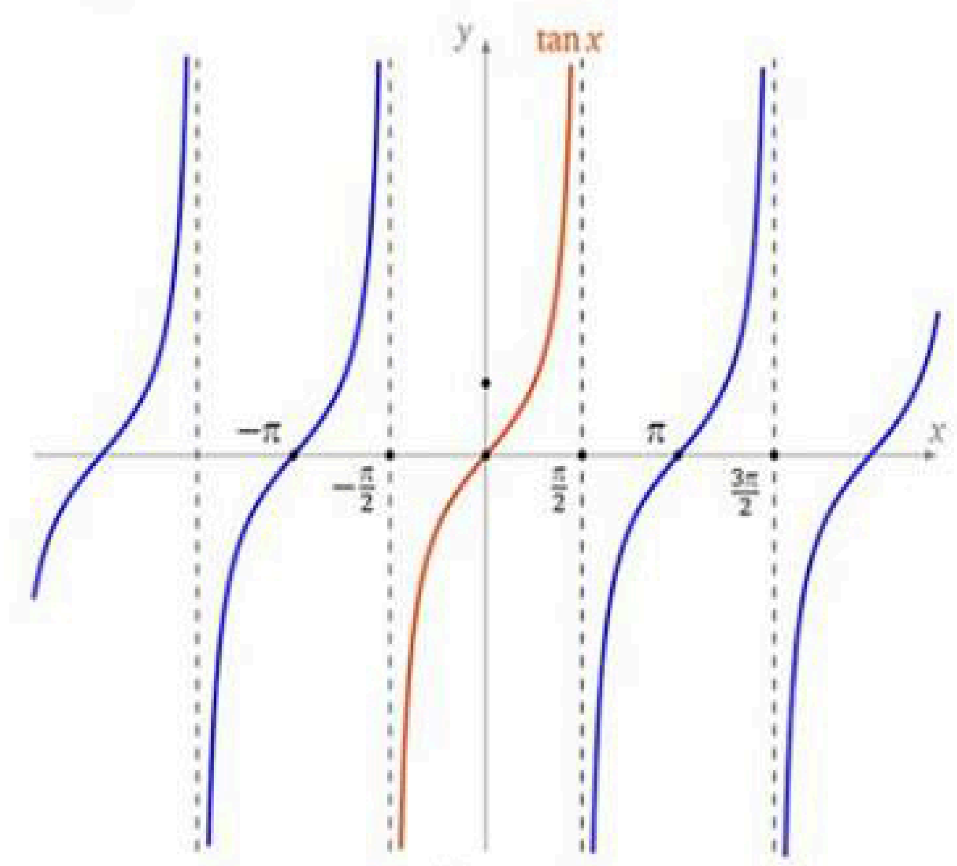


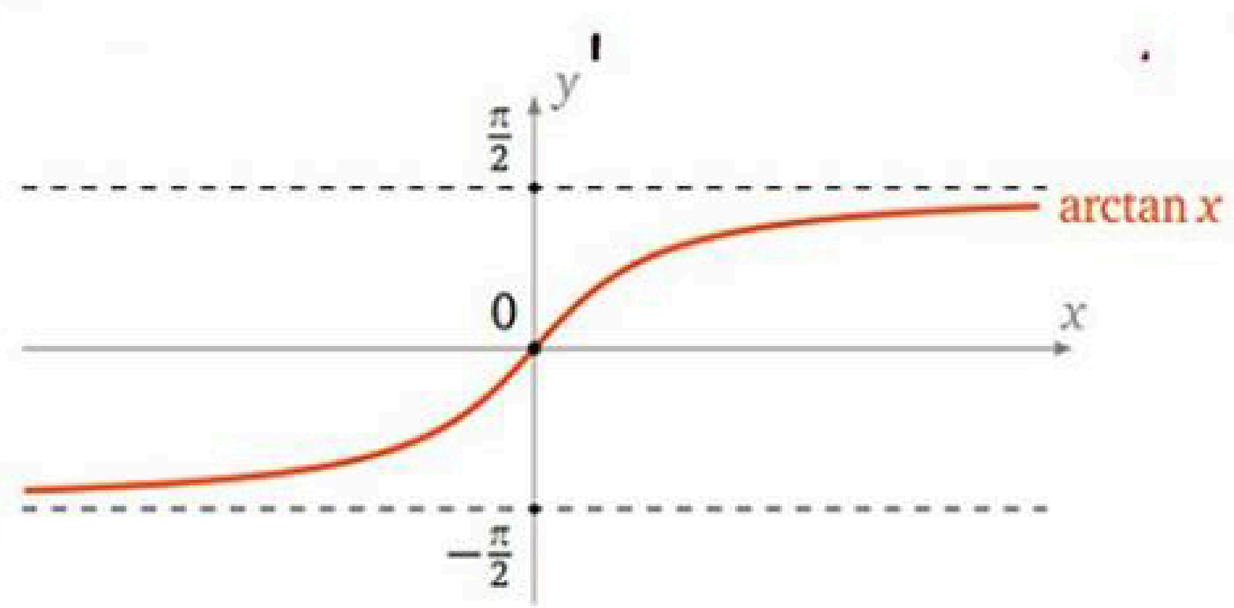
$\forall x \in]-1,1[\quad \arcsin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Arctangente

$tg :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$

$\text{arctg} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$



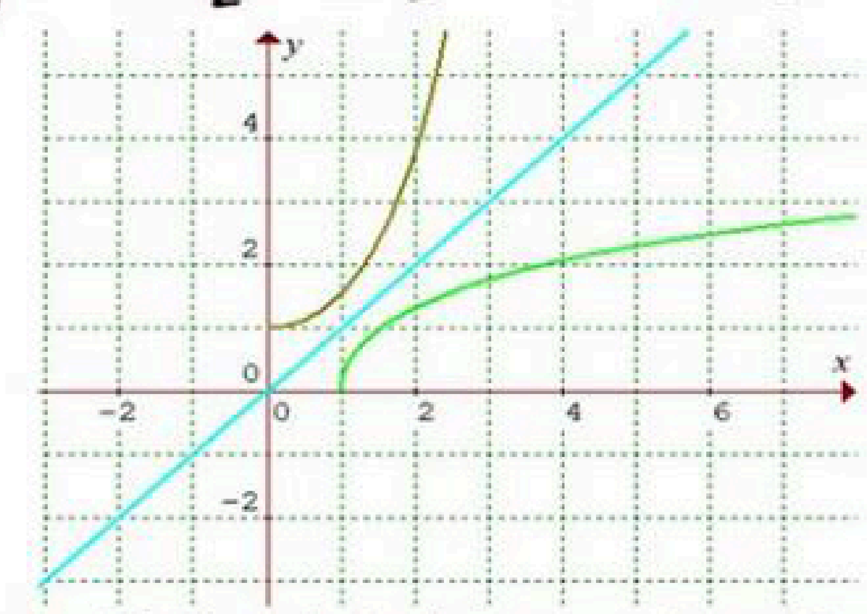


$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{arctg}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Fonctions hyperbolique

$ch : \mathbb{R} \to [1,+\infty[$

La restriction $ch : [0,+\infty[\to [1,+\infty[$ est une bijection. Sa bijection réciproque est $\text{argch}\,x : [1,+\infty[\to [0,+\infty[$



En vert sombre : la fonction cosinus hyperbolique, en vert clair : sa réciproque Argch

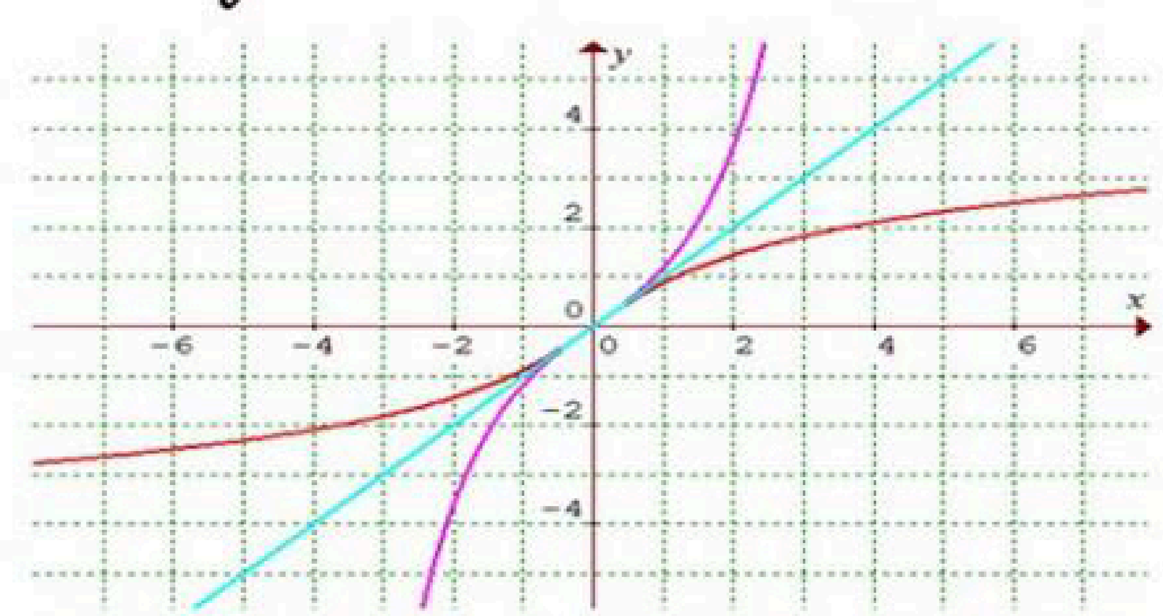
$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad ch\,x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Sinus hyperbolique et son inverse

$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad sh\,x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\text{argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



En violet : la fonction sinus hyperbolique, en rouge : sa réciproque Argsh

$ch^2 x - sh^2 x = 1$

$ch' x = sh\,x \quad , \quad sh' x = ch\,x$

$\text{argsh}\,x$ est derivable et $\text{argsh}' x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\text{argsh}\,x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

$\text{argch}' x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x>1)$

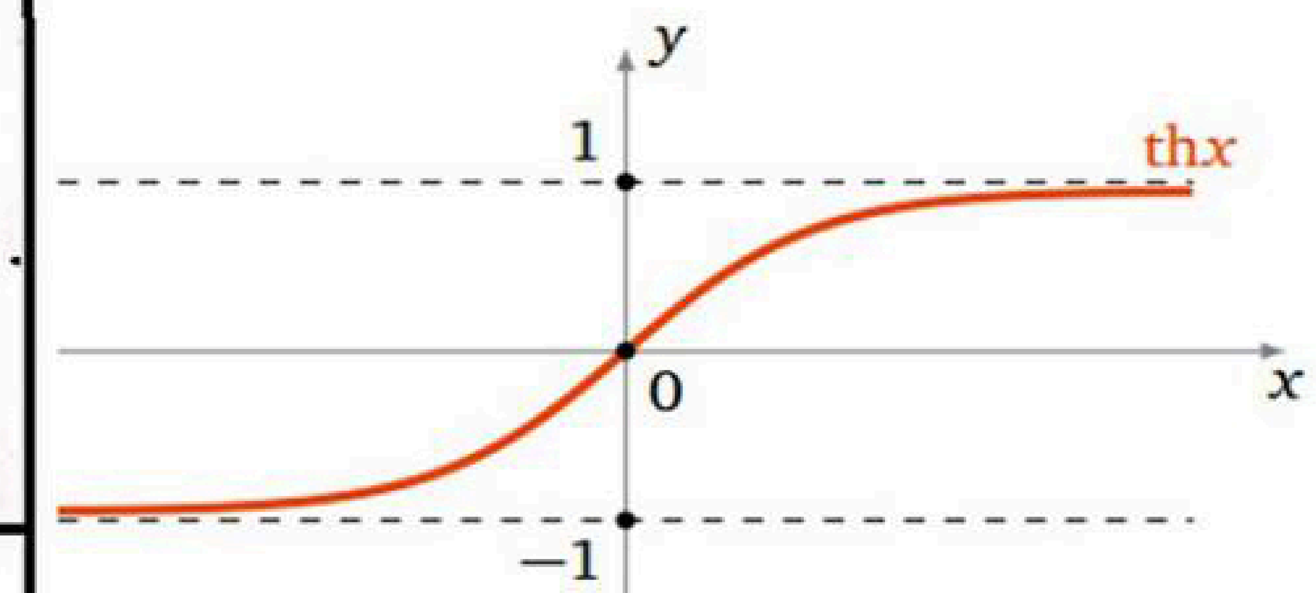
$\text{argth}' x = \dfrac{1}{1-x^2} \quad (|x|<1)$

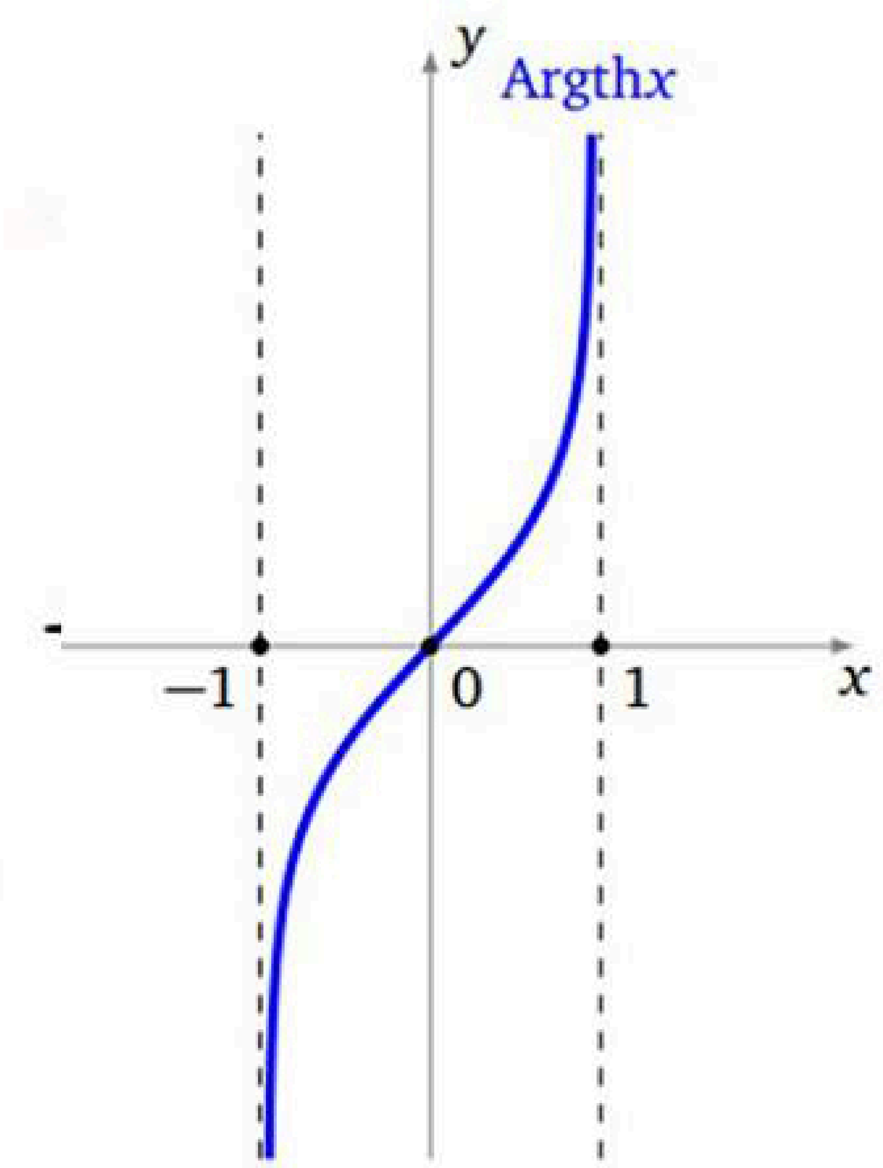
Tangente hyperbolique et son inverse.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad th\,x = \dfrac{sh\,x}{ch\,x}$

$th : \mathbb{R} \to]-1,1[$

$\text{argth} :]-1,1[\to \mathbb{R}$





$\text{argch}\,x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

$\text{argsh}\,x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

$\text{argth}\,x = \frac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

mohamed boutarbouch

Dérivée en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de IR $f: I \to IR$

Soit $x_0 \in I$.

f est derivable en x_0 si $\exists \ell$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell = f'(x_0)$$

ℓ s'appelle le nombre dérivée de f en x_0, noté $f'(x_0)$

. si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

f est derivable sur I, si f est derivable en tout point $x_0 \in I$

. Si f est derivable sur I alors f est continue sur I

Composition:

· : $f: I \to IR$ $g: J \to IR$ et $f(I) \subset J$

f derivable en x et g derivable en $f(x)$ alors $g \circ f$ est derivable en x

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Formule de Leibniz

si f et g admettent des dérivée d'ordre n en x_0, alors il en est de même de fg; et ona:

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0)$$

$$f^{(3)}(x) = f'''(x)$$

derivée de fonction réciproque

Soit f est continue et strictement monotone sur $I \subset IR$.

• si $x_0 \in I$ tq f est derivable en x_0 $(f'(x_0) \neq 0)$. alors f^{-1} est derivable en $f(x_0)$ et on a:

$$\cancel{f'(x_0) \neq 0} \quad (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

• Si f est derivable sur I tq $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$:

$$(\forall x \in I) \ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

f	f'
x^n $(n \in Q)$	$r x^{n-1}$
U^n $n \in Q$	$n U^{n-1} U'$
$\sqrt{U}$ $U \geq 0$	$\frac{U'}{2\sqrt{U}}$
$\cos(ax+b)$	$-a \sin(ax+b)$
$\sin(ax+b)$	$a \cos(ax+b)$
$\frac{1}{U}$	$\frac{-U'}{U^2}$
e^U	$U' e^U$
$\ln U$	$\frac{U'}{U}$
$tg\, U$	$U'(1+tg^2 U) = \frac{U'}{\cos^2 U}$

mohamed bouatrbouch

Extremum local

Soit $f: I \to IR$ une fonction définie sur I.

• on dit que x_0 est un point critique de f si $f'(x_0) = 0$

• On dit que f admet un maximum local en x_0, s'il existe un intervalle ouvert J, $x_0 \in J$ tq:

$\forall x \in I \cap J$ $f(x) \leq f(x_0)$

• on dit que f admet un minimum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J, $x_0 \in J$ tq:

$\forall x \in I \cap J$ $f(x) \geq f(x_0)$

• f admet un extremum local en x_0 si f admet un maximum local **ou** un minimum local en ce point.

Fonction croissante et dérivée

$f: [a,b] \to IR$ une fonction continue sur $[a,b]$, et derivable sur $]a,b[$

$\forall x \in]a,b[$ $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ est croissante

$\forall x \in]a,b[$ $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ est decroissante

- $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est stri croissante
- $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est sti décroissante

Règle de l'Hospital

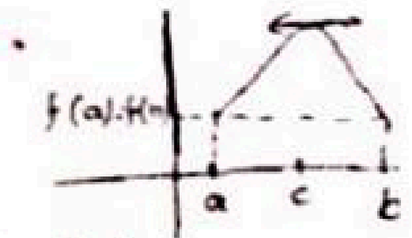
$f, g: I \to IR$ derivable $x_0 \in I$

• supposons $f(x) = g(x_0) = 0$

• $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$ $g'(x) \neq 0$

si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

Théorème de Rolle.



Soit $f: [a,b] \to IR$

• f est continue sur $[a,b]$

• f est dérivable sur $]a,b[$

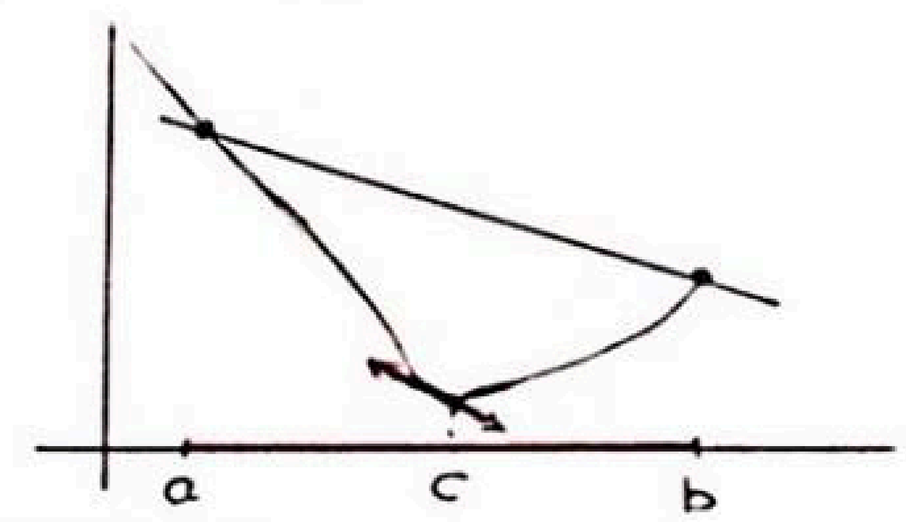
• $f(a) = f(b)$

alors $\exists c \in]a,b[$ tq $f'(c) = 0$

Théorème des accroissements finies

Soit $f: [a,b] \to IR$, une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. $\exists c \in]a,b[$ tq:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$



Inégalité des accroissements finie

Soit $f: I \to IR$ une fonction dérivable sur I ouvert, $\exists M$ tq

$\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq M$ alors:

$\forall x, y \in I$ $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$

exm:

$f(x) = \sin x$, comme $f'(x) = \cos x$ alors $|f'(x)| \leq 1$ $\forall x \in IR$:

$\forall x, y \in IR$ $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$

si $y = 0 \Rightarrow |\sin x| \leq |x|$

rappel:

$|a+b| \leq |a| + |b|$

$|a-b| \geq ||a| - |b||$